

**BDA002 Pružnost a pevnost**  
přednáška 2 (v.23/24.1)  
Kombinované studium

*Vyučující:* Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2023/2024

## 1. Ohyb

- Rovinný a prostý ohyb
- Prostorový (šikmý) ohyb
- Mimostředný tah a tlak

- V ohýbaných konstrukcích jsou obecně přítomny všechny složky vnitřních sil

$$\{N_x; V_y; V_z; M_x; M_y; M_z\} \neq 0$$

- původně přímá osa prutu se po deformaci stává rovinou či prostorou křivkou
- z hlediska analýzy napětí při ohybu budeme rozlišovat
  - rovinný ohyb
  - prostý ohyb
  - šikmý ohyb
  - mimostředný tah a tlak

# Normálová napětí při ohybu

## Rovinný a prostý ohyb

- rovinný ohyb např. v rovině  $xz$

$$N = V_y = 0, \quad M_x = M_z = 0$$

$$V_z \neq 0, \quad M_y \neq 0$$

- pro odvození vztahů normálového napětí se předpokládá  $V_z = 0 \rightarrow$
- prostý ohyb<sup>1</sup>

$$N = V_y = V_z = 0, \quad M_x = M_z = 0$$

$$M_y \neq 0$$

---

<sup>1</sup>prostý ohyb je vyvolán dvojicí koncových momentů  
(např. dvojice sil na opačných koncích nosníku)

# Normálová napětí při ohybu

## Prostý ohyb: předpoklady

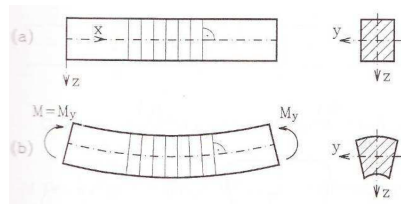
- pro odvození vztahů se vychází ze dvou základních předpokladů
  - tzv. *Bernoulliho hypotéza*: průřezy jsou rovinné a kolmé ke střednici **před** i **po** deformaci

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

- podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

- první z uvedených předpokladů nám umožní odvodit vztah pro  $\varepsilon_x$



Obr. 1: Předpoklady

# Normálová napětí při ohybu

## Prostý ohyb: odvození

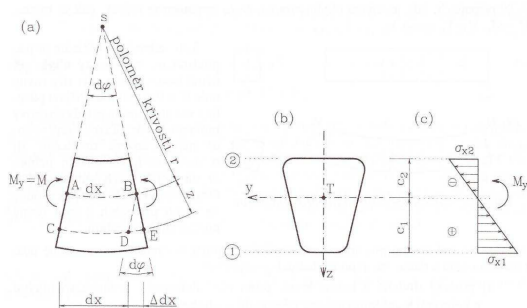
- vlivem ohybu se průřezy elementárního úseku délky  $dx$  vzájemně pootočí o  $d\varphi$
- dojde ke zkrácení resp. prodloužení vláken na horním resp. dolním líci
- vlákna, která nemění délku leží v tzv. neutrální vrstvě (neutraální osa průřezu).

$$dx = \overline{AB} = r d\varphi, \quad dx' = \overline{CD} = (r + z) d\varphi$$

$$\Delta dx = dx' - dx = z d\varphi$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\varphi}{r d\varphi} = \frac{z}{r}$$

- uvažuje-li se lineárně pružný materiál



Obr. 2: Deformace a napětí při ohybu

## Napětí

- uvažuje-li se lineárně pružný materiál

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{r}z$$

- ze statických podmínek rovnováhy vnitřních sil v průřezu vyplývá

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{r} \int_A z^2 dA = \frac{E}{r} I_y$$

- z výše uvedených rovnic vyplývá vztah

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

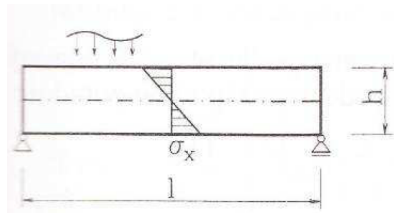
# Normálová napětí při ohybu

Prostý ohyb: závěry

- napětí  $\sigma_x$  je po výšce lineární
- extrémní napětí vznikají na okrajích
- spojnice bodů s nulovou hodnotou napětí je tzv. **neutrální osa** (n.o.)
- uvedený vztah pro  $\sigma_x$  platí přesně pro  $V_z = 0$
- při  $V_z \neq 0$  a  $l > 5h$  platí dostatečně přesně<sup>a</sup>
- v rovině  $xy$  platí analogicky

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y$$

<sup>a</sup>Poznámka: v příčném směru se vlivem podélného protažení/zkrácení vláken se deformuje příčný řez, ale to lze zanedbat



Obr. 3: Deformace a napětí při ohybu



# Normálová napětí při ohybu

## Šikmý ohyb

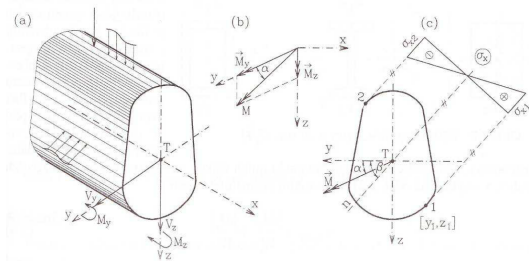
- zatížení prochází těžištěm, **ale není v jedné z hlavních rovin**  $xz$  nebo  $xy$
- provádíme rozklad obecného  $M$  na složky  $M_y$  a  $M_z$

### Šikmý ohyb

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

- neutrální osa  $\sigma_x = 0$  prochází těžištěm, ale je **nakloněná**

$$\tan \beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = \tan \alpha \frac{I_y}{I_z}$$



Obr. 4: Šikmý ohyb

# Normálová napětí při ohybu

## Mimostředný tah a tlak

- obecně jsou nenulové složky

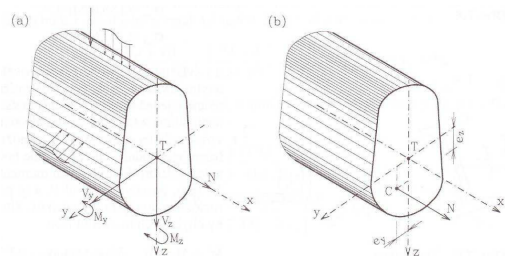
$$N_x \neq 0 \quad M \neq 0$$

- 3 případy:

- $N_x, M_y \neq 0$
- $N_x, M_z \neq 0$
- $N_x, M_y, M_z \neq 0$

- 3 případy namáhání průřezu:

- celý tlačěn
- celý tažen
- část tlačena a část tažena



**Obr. 5:** Mimostředný tah a tlak

Pozn.:  $z_c = e_z$  a  $y_c = e_y$

# Normálová napětí při ohybu

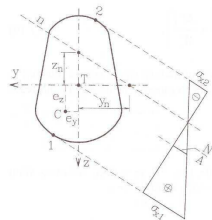
Mimostředný tak a tlak

## Osově zatížení + ohyb v jedné rovině

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z, \quad z_n = \frac{-i_y^2}{z_c}, \quad \text{kde } i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

nebo

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y, \quad y_n = \frac{-i_z^2}{y_c}, \quad \text{kde } i_z^2 = \frac{I_z}{A}$$



Obr. 6: Neutrální osa

## Obecně

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \quad N_x = F, \quad M_y = F \cdot z_c, \quad M_z = -F \cdot y_c$$

$y_n, z_n$  viz. výše. Neutrální osa leží v protilehlém kvadrantu než síla  $F$

# Normálová napětí při ohybu

## Jádro průřezu

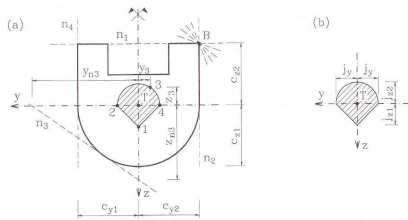
### Jádro průřezu

Oblast v okolí těžiště průřezu, ve kterém musí působit zatížení, aby byl průřez celý tlačný.

Jádrou čáru získáme tak, že pokládáme okolo průřezu n.o. na krajní linie a počítáme polohu  $z_c$  resp.  $y_c$

$$y_c = -\frac{i_z^2}{y_n}$$

$$z_c = -\frac{i_y^2}{z_n}$$



Obr. 7: Jádro průřezu

ŠMIRŤÁK, SVATOPLUK. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.